

Ermittlung der Übergangsmatrizen von Markov-Ketten durch Entropieoptimierung

Hans Braun (orcid: 0009-0000-1305-5818)
Reiner Marchthaler (orcid: 0000-0001-9108-3072)
Steffen Schober (orcid: 0009-0007-3078-6867)

29. Juli 2023

Zusammenfassung

Markov-Ketten beschreiben stochastische Prozesse in Form einer Folge von Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Folgezustands ergibt sich aus der Multiplikation der aktuellen Wahrscheinlichkeiten mit einer Übergangsmatrix. Sind nicht alle Elemente der Übergangsmatrix bekannt, so muss fehlendes Wissen nach einer Strategie erzeugt werden. Bei dem vorgeschlagenen Konzept wird das vorhandene Wissen derart transformiert, dass es als Nebenbedingungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung genutzt werden kann. In dieser Transformationsebene wird auch das fehlende Wissen nach dem Prinzip der maximalen Entropie erzeugt. Eine nun vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung wird anschließend in eine vollständige Übergangsmatrix rücktransformiert. Durch dieses Konzept können unvollständige Übergangsmatrizen komplettiert werden, aber auch beliebige stochastische Zusammenhänge aktueller und künftiger Zustände in Übergangsmatrizen abgebildet werden.

1. Einleitung

Markov-Ketten beschreiben stochastische Prozesse, bei denen künftige Zustände einer Zufallsgröße nur von deren aktuellem Zustand, aber nicht von früheren Zuständen abhängen¹. Damit können die Wahrscheinlichkeiten, künftiger Zustände von Zufallsgrößen auf einfache Weise prognostiziert werden. Diese Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus dem aktuellen Zustand der

¹ Diese Aussage beschreibt Markov-Ketten 1. Ordnung, welche allen Ausführungen des Papers zugrunde liegen. Des Weiteren wird von zeitlich konstanten, also homogenen Übergangsmatrizen ausgegangen.

Zufallsgröße und einer sogenannten Übergangsmatrix, welche die Übergangswahrscheinlichkeiten aller möglichen aktuellen und künftigen Zustände als bedingte Wahrscheinlichkeiten enthält.

Voraussetzung für die Anwendung von Markov-Ketten ist, dass alle Elemente der Übergangsmatrix bekannt sind. Dieses ist nicht immer gegeben, wenn beispielsweise Wissen über Zusammenhänge fehlt oder nicht experimentell ermittelt werden kann. In diesen Fällen ist eine Methode erforderlich, welche die zunächst unbekanntesten Elemente der Übergangsmatrix ermittelt.

Ein mögliches Verfahren zur Ermittlung von Übergangswahrscheinlichkeiten ist der Maximum Likelihood Estimator *MLE* [1], welcher Daten aus Beobachtungen zur Schätzung nutzt. Das Maximum-entropy Markov Modell *MEMM* [2] ermittelt aus Beobachtungen diejenige Folge von Zustandsgrößen, deren Wahrscheinlichkeit die größte Entropie besitzt. Das Modell findet Anwendung beispielsweise bei der Sprach- oder Schrifterkennung. In [3] werden zusätzliche Modellparameter eingeführt, welche aus Beobachtungen nach dem Prinzip der maximalen Entropie errechnet werden. Damit können in einem weiteren Schritt unbekannteste Übergangswahrscheinlichkeiten aus diesen Beobachtungen bestimmt werden. Das in diesem Beitrag vorgeschlagene Konzept verwendet das Wissen aus den gegebenen Elementen einer unvollständigen Übergangsmatrix sowie weiteres stochastisches Wissen und ermittelt fehlende Übergangswahrscheinlichkeiten aus einer zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung nach dem Prinzip der maximalen Entropie.

Das Prinzip der maximalen Entropie ist eine informationstheoretische Methode, welches gesuchte Wahrscheinlichkeiten durch Lösung eines Optimierungsproblems berechnet.

Da die Elemente einer Übergangsmatrix bedingte Wahrscheinlichkeiten repräsentieren, das Prinzip der maximalen Entropie aber Wissen in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung verwendet, welche Konjunktionen von Zuständen enthält, sind Transformationen zwischen diesen verschiedenartigen Matrizen erforderlich. Zusammen mit der Anwendung des Prinzips der maximalen Entropie auf Markov-Ketten stellen diese Transformationen die Schlüsselemente des Konzepts dar.

In dem Paper wird zunächst eine kurze Einführung in Markov-Ketten und Übergangsmatrizen gegeben und danach das Prinzip der maximalen Entropie vorgestellt. Der darauffolgende Abschnitt „Ermittlung fehlender Übergangswahrscheinlichkeiten durch Entropiemaximierung“ beinhaltet die Transformation von Übergangsmatrizen in Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die Ermittlung der optimalen Verteilung in zwei unterschiedlichen Fällen sowie die Rücktransformation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Übergangsmatrizen. Das Konzept wird dann anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht. Das Dokument schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse.

2. Markov-Ketten und Übergangsmatrizen

Markov-Ketten sind Modelle stochastischer Prozesse. Ziel dieser Modelle ist die Ermittlung der Eintrittswahrscheinlichkeiten zukünftiger Ereignisse. Im Fall zeitdiskreter Vorgänge beschreiben Markov-Ketten die möglichen Zustände, die ein Prozess im nächsten Zeitschritt einnehmen kann mittels einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Definition

Es seien $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ eine $k \times k$ Matrix und $X_n = (X_0, X_1, \dots)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ein zeitdiskreter stochastischer Prozess mit einem endlichen Zustandsraum $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. Des Weiteren seien P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, s_i der aktuelle Zustand von X_n , s_j der Zustand im Folgeschritt und s_{i_0} bis $s_{i_{n-1}}$ die Zustände in den zurückliegenden n Schritten. Dann besitzt ein Prozess die sogenannte Markov-Eigenschaft [4] t, wenn gilt:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = s_j | X_0 = s_{i_0}, \dots, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, X_n = s_i) \\ = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = t_{i,j}, \quad s_i, s_j \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

■

Glg. (2.1) zeigt, dass die vergangenen Zustände X_0, \dots, X_{n-1} keinen Einfluss auf den künftigen Zustand X_{n+1} haben. Diese sogenannte „Gedächtnislosigkeit“ ist die zentrale Eigenschaft von Markov-Ketten, welche also besagt, dass ein Folgezustand nur vom aktuellen Zustand abhängt, aber nicht von vergangenen Zuständen.

Die Beschreibung von Markov-Prozessen kann durch ihre Übergangsmatrix \mathbf{T} oder gleichwertig durch ihr Übergangendiagramm erfolgen. Beide Varianten beschreiben die Übergangswahrscheinlichkeiten $t_{i,j}$ aller aktuellen Zustände $X_n = s_i$ auf alle Folgezustände $X_{n+1} = s_j$.

Sind alle Übergangswahrscheinlichkeiten $(t_{i,j})$ in allen betrachteten Prozessschritten konstant, so spricht man von einer **homogenen** Markov-Kette. Dieser Fall liegt allen weiteren Betrachtungen dieses Papers zugrunde. Zur Einführung weiterer Eigenschaften von Markov-Ketten sei auf Literatur, wie [5], [6] verwiesen.

Die Übergangsmatrix \mathbf{T} besitzt bei einem Zustandsraum $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ die Dimension $k \times k$. (2.2) zeigt den grundsätzlichen Aufbau von \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1k} \\ \vdots & t_{ij} & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kk} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Da der Index i den aktuellen Zustand s_i und j den Folgezustand s_j repräsentieren, stellt der Zusammenhang beider Zustände eine bedingte Wahrscheinlichkeit (Konditional) der Form $P = P(s_j | s_i) = t_{i,j}$ dar. Alle Elemente einer Zeile von \mathbf{T} beziehen sich auf denselben aktuellen Zustand s_i . Damit gilt für jede Zeilensumme, also die Addition der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Folgezustände:

$$\sum_{j \in k} t_{i,j} = 1, \quad \forall i, t_{i,j} \in \mathbf{T}. \quad (2.3)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung aller möglichen Zustände \mathcal{S} zum Zeitschritt n kann durch einen Zeilenvektor \mathbf{p}_n beschrieben werden. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{p}_{n+1} im Folgeschritt $n + 1$:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{T}. \quad (2.4)$$

Ausgehend von der Verteilung \mathbf{p}_n im Zeitschritt n ergibt sich die Verteilung \mathbf{p}_{n+k} nach k weiteren Zeitschritten aus:

$$\mathbf{p}_{n+k} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{T}^k. \quad (2.5)$$

Eine Verteilung \mathbf{p}_n heißt **stationär**, falls gilt:

$$\mathbf{p}_{n+k} = \mathbf{p}_n, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Eine grafische Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeiten bietet das Übergangsdiagramm, welches gleichwertig zur Übergangsmatrix \mathbf{T} zu sehen ist. Dabei werden alle möglichen Zustände des Zustandsraums $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$ durch Knoten und die Übergangswahrscheinlichkeiten $(t_{i,j})$ durch gerichtete Kanten repräsentiert. Abbildung 1 zeigt das Übergangsdiagramm einer Markov-Kette mit drei möglichen Zuständen $\{s_1, s_2, s_3\}$ sowie allen Übergangswahrscheinlichkeiten $(t_{i,j})$.

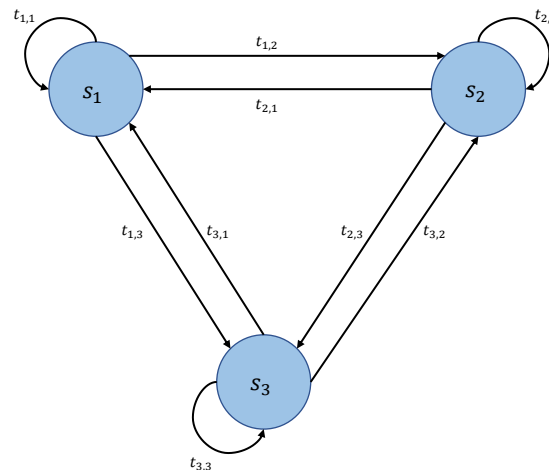


Abbildung 1: Übergangsdiagramm einer Markov-Kette.

Beispiel

Goldhamster Willi ist stolzer Besitzer eines Käfigs mit drei kleinen Häuschen, welche er wechselweise bewohnt. Immer wenn Willi ein Häuschen verlassen hat, stellt sich die Frage, welches der Häuschen er im nächsten Schritt betritt. Geht er in dasselbe Häuschen zurück, oder geht er in eines der anderen beiden? Zur Beantwortung dieser fundamentalen Frage wurde Willi über längere Zeit beobachtet und sein Verhalten statistisch ausgewertet. Um die vorangegangenen Grundlagen von Markov-Ketten zu veranschaulichen, wird Willis Verhalten im vorliegenden Beispiel als Markov-Kette modelliert.

Der endliche Zustandsraum $\mathcal{S} = \{h_1, h_2, h_3\}$ beschreibt die drei möglichen Aufenthaltsorte von Willi, wobei h für Häuschen steht. Der zeitdiskrete stochastische Prozess $\mathbf{X} = X_n = (X_0, X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ steht für Willis tatsächliche Aufenthaltsorte in den Zeitschritten n , also $X_n = h_{i_n}$. Aus Beobachtungen von Willis Verhalten ergab sich folgende Übergangsmatrix \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Man erkennt unmittelbar, dass gemäß Glg. (2.3) die Summe jeder Zeile von \mathbf{T} Eins beträgt, da Willi mit Sicherheit im Folgeschritt irgendeines der drei Häuschen betreten wird.

Befindet sich Willi zum Zeitpunkt 0 in dem Häuschen Nr. 2, also $X_0 = h_{2_0}$, so lautet der zugehörige Zeilenvektor \mathbf{p}_0 der Wahrscheinlichkeitsverteilung aller möglichen Aufenthaltsorte (=Zustände):

$$\mathbf{p}_0 = [0 \quad 1 \quad 0]. \quad (2.8)$$

Des Weiteren zeigt die zweite Zeile von \mathbf{T} mit $t_{2,2} = 0$, dass Willi nach dem Verlassen von Häuschen 2 dieses nicht direkt wieder betritt, sondern sich stets für eines der beiden anderen entscheidet.

Das zur Übergangsmatrix \mathbf{T} gehörende Übergangsdiagramm hat folgendes Aussehen:

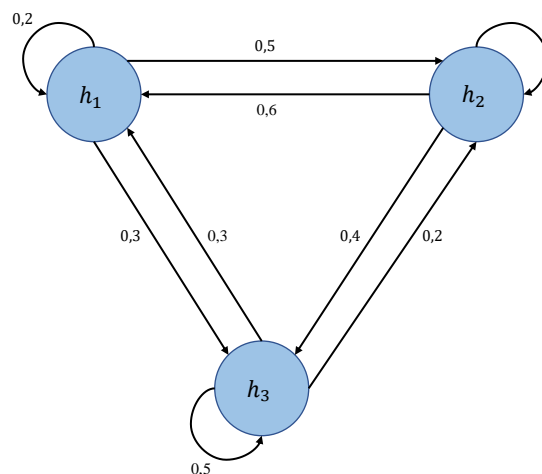


Abbildung 2: Willis Übergangsdiagramm.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{p}_1 im Folgeschritt 1 bei einem aktuellen Zustand $\mathbf{p}_0 = [0 \quad 1 \quad 0]$ errechnet sich nach Glg. (2.4):

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{T} = [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} = [0,6 \quad 0 \quad 0,4]. \quad (2.9)$$

Im darauffolgenden Schritt 2 ergibt sich für \mathbf{p}_2 :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{T} = [0,6 \quad 0 \quad 0,4] \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} = [0,24 \quad 0,38 \quad 0,38]. \quad (2.10)$$

■

Die bisherigen Betrachtungen von Markov-Ketten gingen davon aus, dass alle Elemente der Übergangsmatrix \mathbf{T} bekannt sind. Dies ist aber häufig nicht der Fall und die Übergangsmatrix enthält Wissenslücken (Information Gaps). Zur Schließung dieser Lücken wird in diesem Paper die Generierung fehlenden Wissens nach dem Prinzip der maximalen Entropie vorgeschlagen. Bevor dieses neuartige Konzept im übernächsten Abschnitt präsentiert wird, soll zunächst das Prinzip der maximalen Entropie eingeführt werden, welches für das Verständnis der weiteren Abschnitte notwendig ist.

3. Das Prinzip der maximalen Entropie

Grundlage des Prinzips der maximalen Entropie *MaxEnt* ist die Informationstheorie, welche wesentlich auf Arbeiten von Claude E. Shannon [7] zurückgeht. Die Informationstheorie umfasst die Quantifizierung, Übertragung und Speicherung von Informationen. Die Inhalte dieses Abschnitts sind zum überwiegenden Teil Auszüge aus einer Dissertationsschrift [8]. Dort finden sich vertiefende Inhalte und weitere Quellenangaben.

Ein einfaches Modell der Nachrichtenübertragung besteht aus einem Sender (Quelle), einer Übertragungstrecke und einem Empfänger (Senke) [9]. Dabei ist die Bedeutung einer Nachricht für den Empfänger von seinem Informationsgewinn gegenüber seinem bisherigen Wissensstand abhängig. So erhöht beispielsweise eine dem Empfänger bereits bekannte Information das Wissen des Empfängers nicht. Shannons Informationstheorie stellt ein quantitatives Maß zu dieser qualitativen Aussage bereit und verknüpft den Informationsgehalt einer Nachricht mit dem Logarithmus des Kehrwerts seiner Auftretswahrscheinlichkeit. Der Informationsgehalt einer Nachricht kann anschaulich auch als ein Überraschungs- oder Unsicherheitsmaß [9] interpretiert werden, weswegen Nachrichten auch als Zufallsvariablen betrachtet werden können.

Definition

Gegeben seien eine diskrete Zufallsvariable X mit dem Zustandsraum $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P} = \{P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_k)\}$. Dann beträgt der **Informationsgehalt** $\mathcal{J}(x_q)$ eines Zeichens x_q

$$\mathcal{J}(X = x_q) = \log_2 \left(\frac{1}{P(x_q)} \right) [Bits], \quad q = 1, \dots, k, \forall x_q \in X. \quad (3.1)$$

■

Glg. (3.1) besagt u. a., dass der Informationsgehalt eines sicheren Ereignisses mit $P(X = x_q) = 1$ gleich Null ist, da der Wissensstand des Empfängers hierdurch nicht erhöht wird. Des Weiteren erkennt man, dass der Informationsgehalt einer sehr unwahrscheinlichen Nachricht, wie z. B. „ich habe eine Sechs im Lotto“ sehr hoch ist.

Aufbauend auf obiger Definition des Informationsgehalts eines Elementarereignisses x_q einer Zufallsvariablen X kann der gewichtete Informationsgehalt aller Elementarereignisse dieser Zufallsvariablen ermittelt werden und wird als deren **Entropie** $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ bezeichnet, wobei \mathbf{P} die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P} = \{P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_k)\}$ aller möglichen Zustände von X repräsentiert.

Definition

Gegeben seien eine diskrete Zufallsvariable $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P} = \{P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_k)\}$ und mit $\mathcal{J}(x_q)$ deren jeweiliger Informationsgehalt. Dann beträgt die Entropie \mathcal{H} der Verteilung \mathbf{P} [10]:

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}) = \sum_q [P(x_q) \cdot \mathcal{J}(x_q)] = \sum_q \left[P(x_q) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(x_q)} \right) \right], q = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

■

Die Entropie $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ ist ein Maß für die Unsicherheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer oder mehrerer Zufallsvariablen. Sind alle möglichen Elementarereignisse x_q gleich wahrscheinlich, so spricht man von einer Gleichverteilung. Diese besitzt unter allen möglichen Verteilungen die größtmögliche Entropie, da hierbei die höchste Unsicherheit über den Ausgang eines Experiments besteht. Besitzt eines der Elementarereignisse x_q die Wahrscheinlichkeit Eins, so gilt $\mathcal{H}(\mathbf{P}) = 0$, da es keinerlei Unsicherheit über den Ausgang eines Experiments gibt.

Ein bekanntes Beispiel ist eine Entropiefunktion gemäß Abbildung 3, welche die Entropie $H(\mathbf{P})$ einer binären Zufallsvariablen $X = \{x_1, x_2\}$ mit $\mathbf{P} = \{P(X = x_1), 1 - P(X = x_1)\}$ beschreibt. Man erkennt, dass bei sicherem $P(x_1) = 1$ oder $P(x_2) = 1 - P(x_1) = 0$ die Entropie H gleich Null ist², da in diesen Fällen keine Unsicherheit herrscht. Maximale Entropie liegt bei $P(x_1) = P(x_2) = 0,5$ vor, da hier beide möglichen Ereignisse x_1 und x_2 gleich wahrscheinlich sind. Der Maximalwert $\mathcal{H}(\mathbf{P}) = 1$ ergibt sich hierbei aus der Wahl des Zweierlogarithmus \log_2 .

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbf{P}, \mathcal{P}, \mathbf{X})$ mit dem Ereignisraum $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ enthält die Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} und beschreibt die stochastischen Zusammenhänge aller Zufallsvariablen. Häufig sind allerdings nicht alle Elemente von \mathbf{P} bekannt und bei großen Wahrscheinlichkeitsräumen ist die experimentelle Bestimmung einer Vielzahl fehlender Elemente nahezu unmöglich. Aus mathematischer Sicht besteht dann eine Situation, in der nicht genügend Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen und daher die Lösungsmenge größer Eins ist. Gesucht ist somit eine Strategie, den bestmöglichen Repräsentanten \mathbf{P}^* unter einer Vielzahl zulässiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen \mathbf{P} zu finden.

Zulässige Lösungen des Problems sind alle Verteilungen \mathbf{P} , welche die verfügbaren Nebenbedingungen, also das vorhandene Wissen sowie die Normierungsbedingung³ erfüllen. Sei R die Menge aller gegebenen Nebenbedingungen und \mathbf{P} eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche alle R erfüllt, so nennt man \mathbf{P} den epistemischen Zustand [11] von R und schreibt $\mathbf{P} \models R$.

² Dabei wird $0 \cdot \log_2 0 = 0$ gesetzt, was sich aus der Betrachtung des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \log_2 x)$ ergibt.

³ Die Normierungsbedingung besagt, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung \mathbf{P} gleich Eins ist.

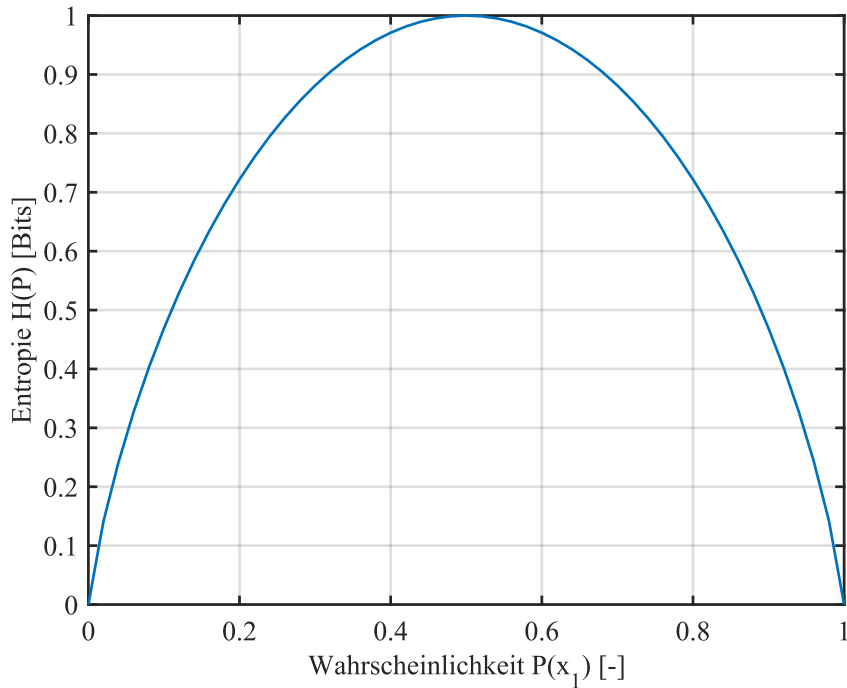


Abbildung 3: Entropiefunktion einer binären Zufallsvariablen X .

Der amerikanische Physiker Edwin Thompson Jaynes formulierte in „Probability Theory: The Logic of Science“ [12] ein Postulat für die Eigenschaften des bestmöglichen Repräsentanten \mathbf{P}^* aus einer Menge $\{\mathbf{P}\}$ von Verteilungen, welche die Nebenbedingungen \mathcal{R} erfüllen. Jaynes forderte, dass eine zunächst unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} so zu wählen sei, dass diese maximale Entropie besitzt. Dadurch ist sichergestellt, dass \mathbf{P}^* größtmögliche Unsicherheit repräsentiert, was im Umkehrschluss bedeutet, dass so wenig, wie möglich vermeintlich sicheres Wissen hinzugefügt wird. Dieser Grundsatz wird das **Prinzip der maximalen Entropie** *MaxEnt* genannt. Mit diesem Postulat transformierte Jaynes die Erzeugung fehlenden Wissens in ein Optimierungsproblem.

Definition

Gegeben seien ein diskreter Ereignisraum $\mathcal{P}(X)$ mit zugehörigem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbf{P}, \mathcal{P}, X)$ sowie eine Menge $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_g, g = 1, \dots, G\}$ von insgesamt G Nebenbedingungen in Form eines linearen Gleichungssystems. Dann ist die gesuchte optimale Verteilung $\mathbf{P}^* \in \mathbf{P}$ so zu wählen, dass die Entropie $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ maximal ist und \mathbf{P}^* alle Nebenbedingungen \mathcal{R} erfüllt:

$$\mathbf{P}^* = \arg \max_{\mathbf{P}} (\mathcal{H}(\mathbf{P})), \quad \mathbf{P} \models \mathcal{R}, \mathbf{P}^* \in \mathbf{P}. \quad (3.3)$$

■

Nebenbedingungen als Wissen über Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen sind häufig in der Form von bedingten Wahrscheinlichkeiten (auch Konditionale genannt) gegeben. Dabei kann die Wahrscheinlichkeit p_g eines Ereignisses $X_1 = b_g$ unter der Bedingung, dass ein Ereignis $X_2 = a_g$ vorliegt formal wie folgt beschrieben werden:

$$\mathcal{R}_g = P(b_g | a_g) = p_g, \quad 0 \leq p_g \leq 1 \quad (3.4)$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* mit maximaler Entropie müssen die Nebenbedingungen $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_g\}$ als algebraische Gleichungen vorliegen. Zur Wandlung von Konditionalen der Form $P(b_g | a_g) = p_g$ in algebraische Gleichungen dient folgende Formel⁴:

$$P(b_g, a_g) \cdot (1 - p_g) - P(\bar{b}_g, a_g) \cdot p_g = 0, \quad 0 \leq p_g \leq 1 \quad (3.5)$$

Die Maximierung der Entropie \mathcal{H} einer Verteilung \mathbf{P} stellt ein Optimierungsproblem dar. Die zu optimierende Zielfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ ist wegen des enthaltenen Logarithmus nichtlinear und mit den Regeln \mathcal{R} liegen typischerweise auch Nebenbedingungen vor. Man spricht dann von einem nichtlinearen Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen. Da die Entropiefunktion $\mathcal{H}(\mathbf{P})$, wie exemplarisch in Abbildung 3 zu erkennen konkav ist [13], stellt das Optimum der Funktion stets ein globales Optimum dar, was die Ermittlung von \mathbf{P}^* erheblich vereinfacht.

Eine mögliche Hilfsfunktion zur Integration der Nebenbedingungen in die zu optimierende Zielfunktion ist die sogenannte Lagrange-Funktion \mathcal{L} [14], bei der jede der G Nebenbedingungen⁵ mit einem Faktor λ_j multipliziert und zur Zielfunktion addiert wird. Formal wird diese Funktion beschrieben durch

$$\mathcal{L} = - \sum_z P_z \cdot \log_2(P_z) + \sum_g \lambda_g \cdot \mathcal{R}_g, \quad z = 1, \dots, Z, g = 1, \dots, G, \quad (3.6)$$

Wobei P_z die Z Elemente der Verteilung \mathbf{P} repräsentieren. Die Lagrangefunktion \mathcal{L} ist eine Funktion in den Veränderlichen P_z und λ_j , deren analytische Optimierung analog zur Extremwertbestimmung von Funktionen in einer Veränderlichen erfolgen kann. Dabei wird anstatt der ersten Ableitung der Funktion deren Gradient gebildet und die Untersuchung der zweiten Ableitung durch die Bestimmung der Definitheit der Hesse-Matrix ersetzt. Bei Bedarf können diese elementaren Methoden in Grundlagenwerken, wie z. B. [15] wiederholt werden. Die Bestimmungsgleichungen des Gradienten von \mathcal{L} lauten:

$$\nabla_{P_z, \lambda_g} \mathcal{L} = \mathbf{0}, \quad z = 1, \dots, Z, g = 1, \dots, G. \quad (3.7)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_1} = 0, & \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_Z} = 0, & \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_G} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Glg. (3.8) beschreibt ein System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, welches nur in einfachen Fällen (kleiner Ereignisraum, wenige Nebenbedingungen) analytisch lösbar ist. Allerdings stehen zur Lösung derartiger Probleme eine Reihe etablierter numerischer Methoden zur Verfügung. Hierzu sei auf Literatur, wie [16] verwiesen.

⁴ Die Herleitung der Formel findet sich neben weiteren vertiefenden Informationen zum Prinzip der maximalen Entropie in [8].

⁵ Die Nebenbedingungen müssen hierbei als Nullstellen von Funktionen definiert sein. Dadurch dürfen sie jederzeit zu einer Zielfunktion addiert werden.

In [17] wird ein sehr einfaches Beispiel zum Prinzip der maximalen Entropie präsentiert, zunächst in symbolischer Form und danach als Zahlenbeispiel. Damit können die Inhalte dieses Abschnitts zum Prinzip der maximalen Entropie noch weiter veranschaulicht werden.

4. Ermittlung fehlender Übergangswahrscheinlichkeiten durch Entropiemaximierung

Die Elemente einer Übergangsmatrix $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ einer Markov-Kette können als bedingte Wahrscheinlichkeiten (Konditionale) eines Folgezustands X_j gegeben ein aktueller Zustand X_i interpretiert werden. Im Falle einer unvollständigen Übergangsmatrix \mathbf{T} der Dimension $k \times k$ liegen dann weniger als $k \cdot k$ Konditionale vor.

Bei dem vorgeschlagenen Konzept sollen die unbekanntene Elemente von \mathbf{T} nach dem Prinzip der maximalen Entropie bestimmt werden. Dazu wird die Übergangsmatrix \mathbf{T} , welche Konditionale enthält in eine Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} transformiert, die die Wahrscheinlichkeiten von Konjunktionen des aktuellen und des künftigen Zustands beinhaltet. Die zunächst unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} wird durch Entropiemaximierung vervollständigt und aus der resultierenden optimalen Verteilung \mathbf{P}^* können dann die bisher fehlenden Konditionale mittels einer einfachen Umrechnung bestimmt werden. Abbildung 4 zeigt schematisch diesen Prozess zur Ermittlung unbekannter Übergangswahrscheinlichkeiten.

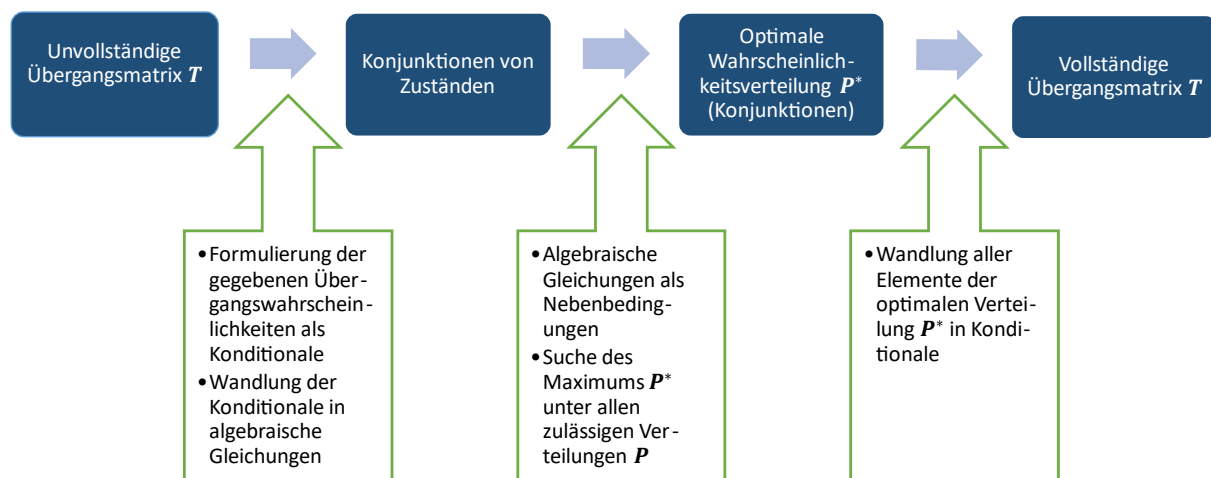


Abbildung 4: Prozess zur Ermittlung unbekannter Übergangswahrscheinlichkeiten.

Zunächst werden die bekannten Elemente von \mathbf{T} als bedingte Wahrscheinlichkeiten formuliert und in ein System algebraischer Gleichungen transformiert. Dieses System repräsentiert die Nebenbedingungen \mathcal{R} der zu optimierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} . Gemäß Glg. (2.1) gilt für jedes Element $t_{i,j}$ von \mathbf{T} :

$$P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = t_{i,j} \quad (4.1)$$

Jeder Konditional der Form (4.1) kann mittels Glg. (4.2) in Summen von Konjunktionen der Zustände s_i und s_j gewandelt werden:

$$P(X_{n+1} = s_j, X_n = s_i) \cdot (1 - t_{i,j}) - P(X_{n+1} = \bar{s}_j, X_n = s_i) \cdot t_{i,j} = 0, \quad (4.2)$$

$$0 \leq t_{i,j} \leq 1$$

Damit entsteht aus den gegebenen Elementen $t_{i,j}$ von \mathbf{T} ein System algebraischer Gleichungen. Diese Gleichungen bestehen gemäß Glg. (4.2) aus Linearkombinationen der Elemente $t_{i,j}$, bei denen die Zustände s_i und s_j nun durch Konjunktionen und nicht mehr durch Konditionale verknüpft sind. Die Wahrscheinlichkeiten $P_{i,j}$ dieser Konjunktionen sind die Elemente der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} . Glg. (4.3) zeigt die Inhalte der beiden Matrizen \mathbf{T} und \mathbf{P} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1k} \\ \vdots & t_{ij} & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kk} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1k} \\ \vdots & P_{ij} & \vdots \\ P_{k1} & \cdots & P_{kk} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Jede Zeile von \mathbf{P} steht für einen aktuellen Zustand s_i und jede Spalte s_j für einen künftigen Zustand und das Element P_{ij} beschreibt die Verbundwahrscheinlichkeit $P(s_i, s_j)$.

Das System algebraischer Gleichungen, welches gemäß Glg. (4.2) aus allen gegebenen Konditionalen von \mathbf{T} erzeugt werden kann, repräsentiert die Nebenbedingungen \mathcal{R} , die jede zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} zu erfüllen hat. Damit stellt jede zulässige Verteilung \mathbf{P} einen epistemischen Zustand $\mathbf{P} \models \mathcal{R}$ dar (siehe auch Abschnitt 3). Im Falle einer nicht vollständig besetzten Übergangsmatrix \mathbf{T} stehen nicht genügend Bestimmungsgleichungen für alle Elemente P_{ij} von \mathbf{P} zur Verfügung und das fehlende Wissen wird nach dem Prinzip der maximalen Entropie erzeugt. Hierbei muss für die optimale Verteilung \mathbf{P}^* gelten:

$$\mathbf{P}^* = \arg \max_{\mathbf{P}} (\mathcal{H}(\mathbf{P})), \quad \mathbf{P} \models \mathcal{R}, \mathbf{P}^* \in \mathbf{P} \quad (4.4)$$

Die Menge aller Elemente $\{t_{i,j}\}$ der Übergangsmatrix \mathbf{T} setzt sich aus gegebenen und zunächst unbekanntem Elementen zusammen.

Es seien $\{t_{i,j}\}$ die Menge aller Elemente von \mathbf{T} , mit $\{u_{i,j}\} \neq \{\}$ die gegebenen / bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten und $\{v_{i,j}\} = \{\}$ die zunächst unbekanntem Elemente von \mathbf{T} . Dann gilt für die Anzahl aller Elemente:

$$|t_{i,j}| = k \cdot k = |u_{i,j}| + |v_{i,j}| \quad (4.5)$$

Ist außer den bekannten Elementen $\{u_{i,j}\}$ kein weiteres Wissen über Zusammenhänge künftiger Zustände s_j verfügbar, so sind die Zeilenvektoren $\mathbf{p}_{n+1}(i)$ der Matrix \mathbf{T} voneinander stochastisch unabhängig, da nur der aktuelle Ausgangszustand die künftige Verteilung beeinflusst. Für jeden Zeilenvektor gilt lediglich die Normierungsbedingung aus Glg. (2.3), dass die Summe aller Elemente gleich Eins ist. Dadurch können die fehlenden Elemente $v_{i,j}$ von \mathbf{T} , unter Einhaltung der Normierungsbedingung für jede Zeile von \mathbf{T} unabhängig von den anderen Zeilen bestimmt werden. Diese Situation wird im Abschnitt 4.1 näher betrachtet.

Ist neben den bekannten Elementen $u_{i,j}$ weiteres Wissen verfügbar, welches mehrere aktuelle Zustände s_i mit einem künftigen Zustand s_j verbindet, so ist dieses ebenfalls bei der Ermittlung

der fehlenden Elemente $v_{i,j}$ von \mathbf{T} zu berücksichtigen. Der Abschnitt 4.2 beschreibt die Ermittlung von $v_{i,j}$ in dieser Konstellation. Im Abschnitt 5 wird dann ein Beispiel zu beiden Varianten vorhandenen Wissens präsentiert.

4.1 Voneinander unabhängige Zeilenvektoren

Jede der gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $u_{i,j}$ lässt sich durch ein Konditional beschreiben:

$$P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = u_{i,j}. \quad (4.6)$$

Die Wandlung von Glg. (4.6) in Konjunktionen von s_i und s_j ergibt gemäß Glg. (4.2):

$$P(X_{n+1} = s_j, X_n = s_i) \cdot (1 - u_{i,j}) - P(X_{n+1} = \bar{s}_j, X_n = s_i) \cdot u_{i,j} = 0, \quad (4.7)$$

$$0 \leq u_{i,j} \leq 1$$

Betrachtet man alle Elemente einer Zeile i , also die Wahrscheinlichkeiten aller künftigen Zustände s_j eines aktuellen Zustands s_i , so zeigt Glg. (4.7) nur Konjunktionen aller Folgezustände s_j mit dem Ausgangszustand s_i der Zeile i . Wahrscheinlichkeiten anderer aktueller Ausgangszustände spielen dabei keine Rolle.

Die Ermittlung der optimalen Verteilung \mathbf{P}^* nach dem Prinzip der maximalen Entropie gemäß Glg. (4.4) kann durch die Lagrange-Methode erfolgen (siehe Abschnitt 3). Dabei werden die Nebenbedingungen, also das gegebene Wissen, in die zu optimierende Entropiefunktion integriert und dann das Optimum dieser erweiterten Funktion, der sogenannten Lagrange-Funktion berechnet. In allgemeiner Formulierung lautet die Lagrange-Funktion zur Entropieoptimierung

$$\mathcal{L} = - \sum_z P_z \cdot \log_2(P_z) + \sum_g \lambda_g \cdot \mathcal{R}_g, \quad z = 1, \dots, Z, g = 1, \dots, G, \quad (4.8)$$

wobei P_z die Elemente von \mathbf{P} , λ_g die Streckungsfaktoren oder Lagrange-Multiplikatoren und \mathcal{R}_g die G Nebenbedingungen repräsentieren. Die Nebenbedingungen \mathcal{R}_g stellen ein Gleichungssystem in den Z Variablen P_z dar. Durch Auflösung dieses Gleichungssystems reduziert sich die Anzahl der Unbekannten um $Z - G + 1$ und damit auch die Anzahl der Summanden der Lagrange-Funktion. Da dieser Schritt jedoch keinen Einfluss auf die prinzipielle Vorgehensweise zur Ermittlung unbekannter Übergangswahrscheinlichkeiten hat, wird er im Folgenden nicht explizit ausgeführt.

Um Mehrfachsummen in der Lagrange-Funktion zu vermeiden, können die Elemente der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} eindimensional indiziert werden, wodurch die $Z = k \cdot k$ Elemente (P_z) im Fall einer $k \times k$ Matrix folgende Indizes erhalten:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{s_1, s_1} & \cdots & P_{s_1, s_k} \\ P_{s_2, s_1} & \cdots & P_{s_2, s_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{s_k, s_1} & \cdots & P_{s_k, s_k} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{k \cdot k - 1} \\ P_{k \cdot k} = P_Z \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Damit lautet die Entropiefunktion $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ der Verteilung \mathbf{P} :

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}) = - \sum_{z=1}^{k \cdot k} P_z \cdot \ln P_z. \quad (4.10)$$

In Glg. (4.10) wird anstatt des Zweierlogarithmus \log_2 der Logarithmus Naturalis \ln verwendet. Da sich beide Funktionen nur um einen Faktor unterscheiden, führt die Maximierung der Entropie \mathcal{H} bzgl. \mathbf{P} in beiden Fällen zum selben Ergebnis, also zur selben Verteilung \mathbf{P}^* . Allerdings gilt durch diese Umstellung für die Entropie nicht mehr die Einheit [Bits], sondern [Nats].

Das verfügbare Wissen aus den nicht-leeren Feldern $\{u_{i,j}\}$ der Übergangsmatrix \mathbf{T} liegt in Form von Konditionalen vor, wobei für jedes Element $u_{i,j}$ gilt:

$$P(s_j, s_i) \cdot (1 - u_{i,j}) - P(\bar{s}_j, s_i) \cdot t_{i,j} = 0, \quad 0 \leq t_{i,j} \leq 1 \quad (4.11)$$

Die Konjunktionen⁶ (s_j, s_i) und (\bar{s}_j, s_i) in Glg. (4.11) beziehen sich auf denselben Ausgangszustand s_i , so dass Glg. (4.11) stets durch eine einzige Zeile der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} repräsentiert wird und keine Elemente anderer Zeilen von \mathbf{P} enthält. Daher sind die Zeilen von \mathbf{P} bezüglich der Nebenbedingungen voneinander unabhängig und die Verteilungen dürfen zeilenweise bestimmt werden.

Sind insgesamt $|u_{i,j}|$ Elemente der Übergangsmatrix \mathbf{T} bekannt, so resultieren hieraus $G - 1 = |u_{i,j}|$ Gleichungen der Form (4.11) als Nebenbedingungen des Optimierungsproblems. Hinzu kommt mit der Normierungsbedingung $\sum P_z - 1 = 0$ stets eine weitere Regel. Damit liegen insgesamt G Nebenbedingungen vor und man beschreibt die Menge aller Regeln durch

$$\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_g\}, \quad G \leq k \cdot k. \quad (4.12)$$

Mit den Gleichungen (4.10) und (4.12) ergibt sich folgende Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = - \sum_z P_z \cdot \ln(P_z) + \sum_g \lambda_g \cdot \mathcal{R}_g, \quad z = 1, \dots, Z, g = 1, \dots, G. \quad (4.13)$$

Das Maximum von \mathcal{L} wird durch Gradientenbildung und Nullsetzen aller partiellen Ableitungen nach \mathbf{P} und $\boldsymbol{\lambda}$ berechnet:

$$\nabla_{\mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^Z, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^G. \quad (4.14)$$

Die partiellen Ableitungen nach denjenigen Variablen P_z , deren Pendant $v_{i,j}$ der Übergangsmatrix \mathbf{T} unbekannt ist, ergeben stets folgende Struktur:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_z} = -\ln(P_z) - 1 + \lambda_1 = 0, \quad \forall v_{i,j}. \quad (4.15)$$

⁶ Konjunktionen sind, im Gegensatz zu Konditionalen kommutativ, so dass gilt: $(s_j, s_i) = (s_i, s_j)$.

Dabei ist λ_1 der Lagrange-Multiplikator der Normierungsbedingung.

Glg. (4.15) zeigt, dass alle unbekannt Elemente P_{zi} innerhalb einer Zeile gleich groß sind, da alle Gleichungen dieser Form gleichgesetzt werden können. Da die Variablen P_{zi} einer Zeile möglicherweise auch noch Nebenbedingungen R_g erfüllen müssen, gilt diese Gleichheit aber nur zeilenweise.

Satz

Sind $\{v_{i,j}\} = \{P(s_j | s_i)\} = \{\}$ die zunächst unbekannt Elemente einer Übergangsmatrix T und liegt außer den bekannten Elementen $\{u_{i,j}\}$ von T kein weiteres Wissen vor, so sind die Elemente $\{P_z(s_j, s_i)\}$ der zugehörigen optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* zeilenweise gleichverteilt:

$$P_z^*(i, j) = c(i), \quad \forall j \in \{v_{i,j}\}. \quad (4.16)$$

■

Die Konstante $c(i)$ repräsentiert die Verbundwahrscheinlichkeit, welche für alle mit $\{v_{i,j}\}$ korrelierten P_z^* gleich groß ist. Der Satz vereinfacht die Ermittlung der optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung P erheblich, da sich die Anzahl der Unbekannten P_z^* aus der Gradientenbildung der Lagrange-Funktion gemäß Glg. (4.14) verringert. Dieses resultiert aus dem Gleichsetzen der Elemente $P_z^*(i, j)$ für alle zunächst unbekannt $P_z^*(i, j(t_{i,j}))$ innerhalb der einzelnen Zeilen von P .

4.2 Voneinander abhängige Zeilenvektoren

Das hier vorgeschlagene Konzept bietet eine interessante Erweiterungsmöglichkeit des in Übergangsmatrizen verankerten Wissens. Da die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten sich durch Rücktransformation aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben, findet der eigentliche Wissenserwerb innerhalb der Wahrscheinlichkeitsverteilung statt. Dort können beliebige stochastische Nebenbedingungen berücksichtigt werden, welche nicht nur einen aktuellen mit einem Folgezustand miteinander verbinden. Vielmehr kann beispielsweise eine Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Folgezustands unabhängig vom aktuellen Zustand berücksichtigt werden:

$$P(s_j) = q, \quad q \in \mathbb{R}, 0 \leq q \leq 1. \quad (4.17)$$

Durch Umformung ergibt sich aus Glg. (4.17) ein Term, welcher alle k aktuellen Zustände $s_{i,k}$ mit einem künftigen Zustand s_j verbindet:

$$P(s_j) = \sum_k P(s_j, s_{i,k}) = q, \quad q \in \mathbb{R}, 0 \leq q \leq 1. \quad (4.18)$$

Glg. (4.18) stellt somit eine weitere Nebenbedingung dar, welche ebenfalls in die Lagrange-Funktion einfließt. Die Vorgehensweise gemäß Glg. (4.18) wird in Abschnitt 5 anhand eines einfachen Beispiels demonstriert.

Ist also neben den bekannten Elementen $\{u_{i,j}\}$ weiteres Wissen verfügbar, welches beispielsweise mehrere aktuelle Zustände s_i mit einem künftigen Zustand s_j verbindet, so gilt die Unabhängigkeit der Zeilen von T nicht mehr. Dies bedeutet, dass eine vereinfachte Berechnung von \mathbf{P}^* gemäß Abschnitt 4.1 nicht mehr möglich ist und alle Elemente $P_z \in \mathbf{P}$ aus der Gradientenbildung der Lagrange-Funktion gemäß Glg. (4.14) explizit zu berechnen sind:

$$\nabla_{\mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^Z, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^G. \quad (4.19)$$

Besteht die Übergangsmatrix \mathbf{T} aus $k \cdot k$ Elementen und sind G Nebenbedingungen gegeben, so repräsentiert Glg. (4.19) ein System von insgesamt $k \cdot k + G$ Gleichungen. Durch Auflösen und Einsetzen von Nebenbedingungen reduziert sich die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten entsprechend, wobei allerdings komplexe Ausdrücke auftreten können. In der Regel kommen zur Lösung eines umfangreichen nichtlinearen Gleichungssystems, bestehend aus vielen Zustandsgrößen und /oder vielen Nebenbedingungen, numerische Methoden zur Anwendung. Vertiefende Informationen zu numerischen Verfahren finden sich beispielsweise in [18].

4.3 Rücktransformation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung in eine Übergangsmatrix

Durch Lösen des Gleichungssystems (4.19) ergeben sich alle Elemente $P_z^* = P_{i,j}^*$ der optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* . Zur Ermittlung von \mathbf{T} aus \mathbf{P}^* werden die in \mathbf{P}^* enthaltenen Konjunktionen in Konditionale gewandelt. Grundlage hierfür ist die Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten:

$$P(s_j | s_i) = \frac{P(s_j, s_i)}{P(s_i)} = \frac{P_{i,j}}{P_i}. \quad (4.20)$$

Die Anwendung von Glg. (4.20) auf die Ermittlung der Übergangsmatrix \mathbf{T} ergibt:

$$P(s_j | s_j) = t_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{\sum_j P_{i,j}} \quad (4.21)$$

Zur Berechnung des Elements $t_{i,j} = P(s_j | s_i)$ von \mathbf{T} wird also das zugehörige Element $P_{i,j}$ der Verteilung \mathbf{P}^* durch die Summe aller Elemente der i -ten Zeile von \mathbf{P}^* dividiert⁷.

Durch die Anwendung von Glg. (4.20) auf alle Elemente von \mathbf{P}^* ergibt sich eine vollständige Übergangsmatrix \mathbf{T} mit folgenden Eigenschaften:

1. Alle ursprünglich gegebenen Elemente $u_{i,j}$ von \mathbf{T} bleiben unverändert erhalten. Diese Aussage setzt voraus, dass der Algorithmus zur Entropieoptimierung gegen das Maximum konvergierte.

⁷ Das Ergebnis dieser Transformation ist nichtkommutativ.

- Die neu berechneten Elemente $v_{i,j}$ von T wurden derart ermittelt, dass der Verteilung P und damit auch der Übergangsmatrix T so wenig wie möglich nicht gegebenes Wissen hinzugefügt wurde.

Das vorgestellte Konzept zur Ermittlung fehlender Elemente einer Übergangsmatrix ermöglicht hierbei die Implementierung beliebigen stochastischen Wissens in Übergangsmatrizen.

5. Das Gamer-Klischee-Modell

Das Gamer-Klischee-Modell beschreibt die weitverbreitete Ansicht, dass das Leben von Gamern weitestgehend nur aus Zocken, Essen, Schlafen / Pennen⁸ und einem bisschen Sonstigem besteht. Daraus ergeben sich folgende vier Zustände:

- Zocken (Z)
- Essen (E)
- Pennen (P)
- Sonstiges (S)

Damit entsteht der Zustandsraum $\mathcal{S} = \{Z, E, P, S\}$.

In dem hier gewählten Beispiel sind nicht alle Übergangswahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände bekannt, sondern gemäß des Übergangsdiagramms in Abbildung 5 nur ein Teil davon.

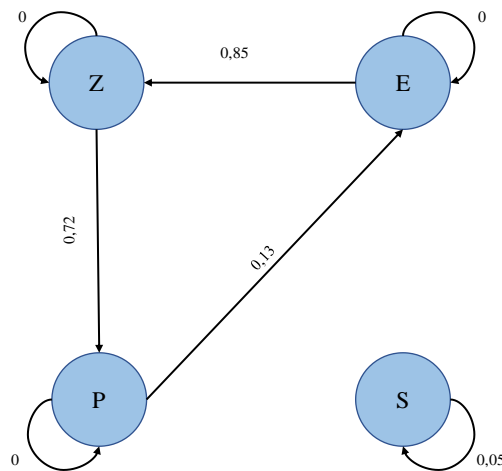


Abbildung 5: Markov-Modell mit unvollständiger Übergangsmatrix.

⁸ Das Schlafen wird hier als Pennen bezeichnet, um eine Doppelung des Kürzels S (Sonstiges) zu vermeiden.

Die zugehörige Übergangsmatrix \mathbf{T} ist in Tabelle 1 dargestellt. Zur Verdeutlichung für nachfolgende Rechenschritte sind die bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten grün hinterlegt.

Tabelle 1: Übergangsmatrix \mathbf{T} bei unvollständigem Wissen.

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0		0,72	
E_i	0,85	0		
P_i		0,13	0	
S_i				0,05

In den folgenden sieben Gleichungen (5.1) ist die formale Beschreibung des Wissens aus Tabelle 1 zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 P(Z_j|Z_i) &= 0 \\
 P(E_j|E_i) &= 0 \\
 P(P_j|P_i) &= 0 \\
 P(S_j|S_i) &= 0,05 \\
 P(P_j|Z_i) &= 0,72 \\
 P(Z_j|E_i) &= 0,85 \\
 P(E_j|P_i) &= 0,13
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die 4×4 Übergangsmatrix \mathbf{T} besteht aus insgesamt 16 Elementen, von denen mit Glg. (5.1) zunächst sieben bekannt sind. Hinzu kommt durch die Normierungsbedingung der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} eine weitere Gleichung, so dass insgesamt acht Nebenbedingungen \mathcal{R} vorliegen. Damit ist das Gleichungssystem zur Bestimmung aller 16 Elemente von \mathbf{T} unterbestimmt und es existieren beliebig viele Lösungen.

Zur Ermittlung einer Lösung nach dem Prinzip der maximalen Entropie werden die sieben Nebenbedingungen aus (5.1), welche als Konditionale von aktuellen und künftigen Zuständen vorliegen, zunächst in Konjunktionen umgerechnet, so dass sie aus Elementen der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} bestehen. Die Umrechnung erfolgt für jede Nebenbedingung aus (5.1) nach Glg. (4.11), siehe auch Anhang 7.1. Zusammen mit der Normierungsbedingung stehen damit acht Nebenbedingungen zur Verfügung.

Das Gleichungssystem der $7 + 1$ Nebenbedingungen wird soweit möglich aufgelöst, wodurch sich die Anzahl der Variablen der zu maximierenden Lagrange-Funktion von 16 auf $8 + 1$ reduziert.

Zur Bestimmung aller Elemente der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} wird nun deren Entropie \mathcal{H} unter Berücksichtigung der acht Nebenbedingungen (5.1) maximiert, woraus die optimale Verteilung \mathbf{P}^* resultiert. Die Aufstellung der reduzierten Lagrange-Funktion, deren Gradientenbildung sowie die Lösung des resultierenden Beispiels wird an dieser Stelle nicht explizit dargestellt. In [17] findet sich ein einfaches Beispiel in dem diese Schritte anhand einer 2×2 Matrix ausführlich beschrieben werden. Die nachfolgenden Berechnungen der optimalen Verteilungen \mathbf{P}^* des Gamer-Klischee-Modells wurden mit Hilfe der Expertensystemshell *SPIRIT* (siehe Anhang 7.2) durchgeführt.

Die Elemente von \mathbf{P}^* stellen die Wahrscheinlichkeiten von Konjunktionen von Zuständen der Form $P(s_j, s_i)$ dar⁹, wobei s_i einen Ausgangszustand und s_j einen Folgezustand repräsentieren. Tabelle 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* , die das Wissen aus Glg. (5.1) beinhaltet:

Tabelle 2: Optimierte Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* mit dem Wissen aus Glg. (5.1).

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0,000	0,031	0,158	0,031
E_i	0,143	0,000	0,013	0,013
P_i	0,117	0,035	0,000	0,117
S_i	0,114	0,114	0,114	0,017

Zur Plausibilisierung von Tabelle 2 wird die Summe aller Elemente gebildet, welche gemäß der Normierungsbedingung gleich Eins sein muss. Die Auswertung ergibt:

$$\sum_i \sum_j P(s_i, s_j) = 1,017 \approx 1. \quad (5.2)$$

Die geringe Abweichung dieser berechneten Summe vom Wert Eins ist den Abbruchkriterien der Optimierungssiteration sowie der Rundung von Nachkommastellen geschuldet.

Mittels der Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten werden nun die gesuchten Konditionale der Übergangsmatrix \mathbf{T} aus der optimierten Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* ermittelt (siehe auch Anhang 7.3). Dabei gilt für die Elemente der Übergangsmatrix \mathbf{T} :

$$t_{i,j} = P(s_j | s_i) = \frac{P(s_j, s_i)}{P(s_i)}. \quad (5.3)$$

Dabei gilt für jede Zeilensumme

$$\sum_i t_{i,j} = \sum_{s_i} P(s_j | s_i) = 1. \quad (5.4)$$

Auf Basis des Wissens aus Glg. (5.1) entsteht mit Glg. (5.3) eine vollständige Übergangsmatrix \mathbf{T} gemäß Tabelle 3.

Tabelle 3: Übergangsmatrix \mathbf{T} bei Wissen gemäß Glg. (5.1).

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0	0,14	0,72	0,14
E_i	0,85	0	0,075	0,075
P_i	0,435	0,13	0	0,435
S_i	0,3167	0,3167	0,3167	0,05

Man erkennt, dass die so ermittelten Elemente (weißer Hintergrund) in den einzelnen Zeilen gleichverteilt sind. Dies begründet sich in der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Zeilen, da kein Wissen über Zusammenhänge aktueller oder auch künftiger Zustände untereinander

⁹ Bei der Konjunktion, also dem gleichzeitigen Vorliegen zweier Zustände handelt es sich in diesem Kontext um eine rein mathematische Sichtweise.

vorliegt. Als Konsequenz dieses Ergebnisses können zur Bestimmung der optimalen Verteilung \mathbf{P}^* die unbekannt Elemente von \mathbf{P}^* und damit auch von \mathbf{T} vereinfacht berechnet werden. Gemäß Glg. (4.19) reduziert sich die Anzahl der Bestimmungsgleichungen aus der Gradientenbildung durch Gleichsetzung um $|v_i| - 1$, wobei $|v_i|$ die Anzahl der unbekannt Elemente der i -ten Zeile von \mathbf{T} darstellt.

Liegt hingegen Wissen über den Zusammenhang mehrerer Zustände im selben Zeitschritt vor, so sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten der unbekannt Folgezustände nicht mehr zwangsläufig gleichverteilt. Dies soll anhand des Gamer-Klischee-Modells gezeigt werden.

Aus Beobachtungen weiß man, dass der Gamer 70% seiner Zeit mit Zocken verbringt und dies kann formal als Wahrscheinlichkeit ohne Vorbedingung ausgedrückt werden:

$$P(\text{Folgezustand} = Z_j) = 0,70 \quad (5.5)$$

Die in Glg. (5.5) enthaltene Verknüpfung mehrerer Zustände eines Zeitschritts wird durch Glg. (5.6) verdeutlicht:

$$P(Z_j) = P(Z_j, Z_i) + P(Z_j, E_i) + P(Z_j, P_i) + P(Z_j, S_i) = 0,70 \quad (5.6)$$

Neben der Bedingung (5.5) gelten im Folgenden weiterhin die sieben Nebenbedingungen aus Glg. (5.1) sowie die Normierungsbedingung. Durch Entropiemaximierung erhält man damit folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* :

Tabelle 4: Optimierte Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* mit dem Wissen aus Glg. (5.1) und Glg. (5.6).

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0,000	0,012	0,060	0,012
E_i	0,246	0,000	0,022	0,022
P_i	0,222	0,039	0,000	0,038
S_i	0,233	0,040	0,040	0,016

Der vorgegebene Wert $P(Z_j) = 0,7$ ergibt sich gemäß Glg. (5.6) auch, wenn man direkt die Elemente der ersten Spalte der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P}^* aus Tabelle 4 addiert. Dadurch ist gezeigt, dass der Optimierungsalgorithmus auch unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Nebenbedingung gegen eine Verteilung \mathbf{P}^* mit maximaler Entropie konvergiert.

In Tabelle 5 ist die Übergangsmatrix \mathbf{T} des Gamer-Modells unter Berücksichtigung von Glg. (5.1) und Glg. (5.5) dargestellt. Die enthaltenen Wahrscheinlichkeiten wurden dabei mittels Glg. (4.21) aus den Elementen der Tabelle 4 errechnet.

Tabelle 5: Übergangsmatrix des Game-Modells bei bekanntem Zusammenhang zwischen Zuständen innerhalb eines Zeitschritts.

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0	0,14	0,72	0,14
E_i	0,85	0	0,0751	0,0751
P_i	0,742	0,1301	0	0,1273
S_i	0,7076	0,1213	0,1213	0,05

Die zusätzliche Nebenbedingung (5.5) wirkt sich primär auf die Spalte (Z_j) aus. Tabelle 5 zeigt in den Zeilen P_i und S_i , dass die weißen Zellen der Matrix nun nicht mehr alle gleichverteilt sind. Hier wirkt sich die Regel (5.5) aus, welche die Folgezustände zeilenübergreifend miteinander verbindet. Wandelt man die Konditionale der Spalte Z_j in Konjunktionen aller möglichen Ausgangszustände, so bestätigt sich Glg. (5.6) nämlich $P(Z_j) = P(Z_j, Z_i) + P(Z_j, E_i) + P(Z_j, P_i) + P(Z_j, S_i) = 0,70$.

Die Gleichverteilungen in den Zeilen Z_i und E_i bleiben hingegen erhalten, da dort die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(Z_j|Z_i)$ und $P(Z_j|E_i)$ vorgegeben sind (grüne Zellen) und durch Glg. (5.5) in der Spalte (Z_j) nicht beeinflusst werden können¹⁰.

6. Ergebnisse

Die Ausführungen des Papers zeigen, dass das vorgeschlagene Konzept neue Möglichkeiten zur Erzeugung und Implementierung von Wissen in Übergangsmatrizen von Markov-Ketten bietet.

Für die Bestimmung unbekannter Übergangswahrscheinlichkeiten nach dem Prinzip der maximalen Entropie sind grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Das vorhandene Wissen beinhaltet ausschließlich Regeln mit jeweils nur einem aktuellen und einen künftigen Zustand. Dieses trifft stets für vorgegebene Übergangswahrscheinlichkeiten zu. In diesem Fall sind alle noch unbekanntes Übergangswahrscheinlichkeiten zeilenweise gleich groß zu wählen. Dadurch vereinfacht sich die Optimierungsrechnung und es ist dennoch sichergestellt, dass das erzeugte Wissen so wenig, wie möglich unbegründete Annahmen enthält.
2. Das vorhandene Wissen beinhaltet neben gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten auch beliebige stochastische Regeln, die beispielsweise Zustandsgrößen desselben Zeitschritts miteinander verbinden. In diesem Fall darf nicht von einer Gleichverteilung ausgegangen werden und die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten sind durch eine vollständige Optimierungsrechnung aller Elemente der Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bestimmen. Auch hierbei werden so wenig, wie möglich unbegründete Annahmen getroffen und das Ergebnis folgt ebenfalls dem Optimalitätsprinzip.

Durch dieses Konzept können unvollständige Übergangsmatrizen komplettiert werden, aber auch beliebige stochastische Zusammenhänge aktueller und künftiger Zustände in Übergangsmatrizen abgebildet werden.

¹⁰ Sollten sich vorgegebene Übergangswahrscheinlichkeiten (grüne Zellen) gegenüber ihrem vorgegebenen Wert verändern, so deutet dieses auf mögliche Widersprüche im Regelwerk hin.

7. Anhang

7.1 Nebenbedingungen des Gamer-Klischeemodells

Die Nebenbedingungen aus Glg. (5.1) enthalten Konditionale und müssen in der Lagrange-Gleichung als Konjunktionen aktueller und künftiger Zustände ausgedrückt werden. Die Wandlung von Konditionalen der Form $P(b_g | a_g) = p_g$ in Konjunktionen erfolgt durch $P(b_g, a_g) \cdot (1 - p_g) - P(\bar{b}_g, a_g) \cdot p_g = 0$ (siehe auch Glg. (3.5)).

Tabelle 6: Wandlung der Konditionale der Nebenbedingungen in Konjunktionen.

$P(Z_j Z_i) = 0 \Leftrightarrow P(Z_j, Z_i) \cdot 1 - P(\bar{Z}_j, Z_i) \cdot 0 = 0$
$P(E_j E_i) = 0 \Leftrightarrow P(E_j, E_i) \cdot 1 - P(\bar{E}_j, E_i) \cdot 0 = 0$
$P(P_j P_i) = 0 \Leftrightarrow P(P_j, P_i) \cdot 1 - P(\bar{P}_j, P_i) \cdot 0 = 0$
$P(S_j S_i) = 0,05 \Leftrightarrow P(S_j, S_i) \cdot 0,95 - P(\bar{S}_j, S_i) \cdot 0,05 = 0$
$P(P_j Z_i) = 0,72 \Leftrightarrow P(P_j, Z_i) \cdot 0,28 - P(\bar{P}_j, Z_i) \cdot 0,72 = 0$
$P(Z_j E_i) = 0,85 \Leftrightarrow P(Z_j, E_i) \cdot 0,15 - P(\bar{Z}_j, E_i) \cdot 0,85 = 0$
$P(E_j E_i) = 0,13 \Leftrightarrow P(E_j, E_i) \cdot 0,87 - P(\bar{E}_j, E_i) \cdot 0,13 = 0$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} , welche sich aus der Transformation von \mathbf{T} ergibt, gilt folgende Normierungsbedingung:

$$\sum_i \sum_j P(s_i, s_j) = 1, \quad \forall i, j \in S \quad (7.1)$$

Die Normierungsbedingung (7.1) kommt zu den sieben Nebenbedingungen gemäß Tabelle 6 hinzu, so dass insgesamt acht Nebenbedingungen bei der Entropieoptimierung zu berücksichtigen sind. Diese acht Nebenbedingungen können zur weitestmöglichen Auflösung des zugehörigen Gleichungssystems mit ursprünglich 16 unbekanntem Konjunktionen genutzt werden, so dass eine Lagrange-Gleichung mit lediglich $16 - 8 + 1 = 9$ Zufallsvariablen (Konjunktionen) zu optimieren ist.

Die algebraischen Operationen zur Auflösung der acht Nebenbedingungen bei 16 gesuchten Konjunktionen in \mathbf{P} werden in diesem Paper wegen ihres Umfangs und der daraus resultierenden schwierigen Nachvollziehbarkeit nicht ausgeführt. Ein einfaches Beispiel zur manuellen Auflösung von Nebenbedingungen bei einer 2×2 -Verteilung findet sich in [19], Kap. 7, S. 150 ff.. Die optimale Verteilung \mathbf{P}^* des Gamer-Klischee-Modells wurde mit Hilfe des Tools *SPIRIT* (siehe Anhang 7.2) ermittelt.

7.2 Toolgestützte Berechnung der optimalen Verteilung

Die Modellierung und Ermittlung der optimalen Verteilung \mathbf{P}^* des Gamer-Klischee-Modells erfolgte in der Expertensystemshell *SPIRIT* [11], [20] der FernUniversität in Hagen. Das Java Applet *SPIRIT* ermöglicht den Aufbau von Wissensdomänen durch die Definition von Zufallsvariablen mit ihren Ausprägungen sowie der Eingabe von Nebenbedingungen. Fehlendes Wissen ermittelt *SPIRIT* nach dem Prinzip der maximalen Entropie. Hieraus resultiert ein

vollständiges stochastisches Modell, mit dem *SPIRIT* beliebige Anfragen, wie z. B. nach zunächst unbekanntem Elementen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* beantworten kann. Eine Einführung in das Tool findet sich in [21].

Abbildung 6 zeigt links die Domäne des Gamer-Modells modelliert in *SPIRIT*. Die Domäne besteht aus den beiden diskreten Zufallsvariablen „Aktuell“ und „Folgezustand“ mit ihren jeweiligen Ausprägungen / Zuständen.

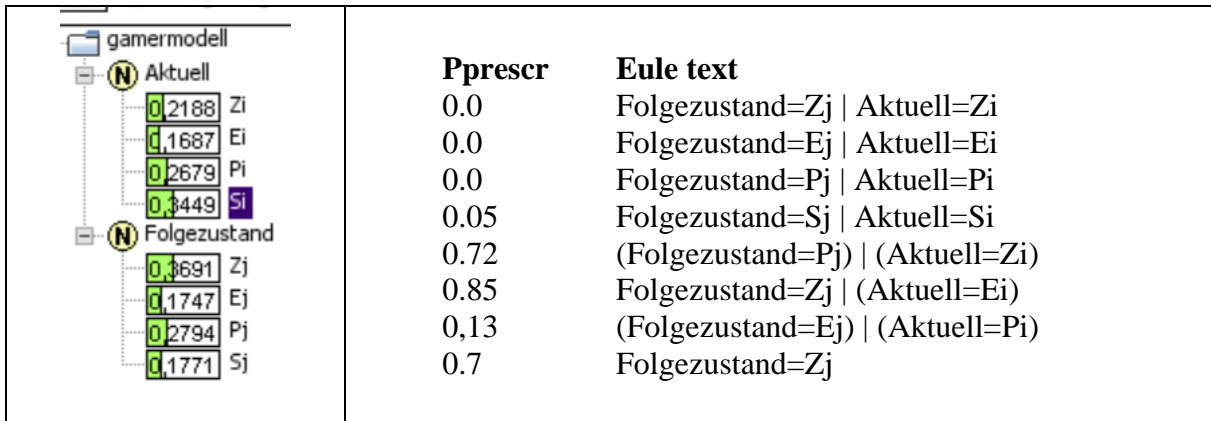


Abbildung 6: Domäne und Regelwerk des Gamer-Modells in *SPIRIT*.

Der rechte Teil der Abbildung zeigt die Nebenbedingungen / Regeln in *SPIRIT*-Syntax. Die Regeltexte der Tabelle können direkt in den *Rule Editor* von *SPIRIT* kopiert werden.

SPIRIT berechnet die Randverteilungen (Zeilen- oder Spaltensummen) der Zufallsvariablen unter den aktiven Nebenbedingungen. Im linken Teil von Abbildung 6 sind diese Randverteilungen numerisch und als Balken ausgewiesen.

Um die Wahrscheinlichkeiten von Konditionalen zu berechnen, ist in der Domäne lediglich die jeweilige Bedingung durch anklicken zu aktivieren. Abbildung 7 zeigt hierzu zwei Beispiele.

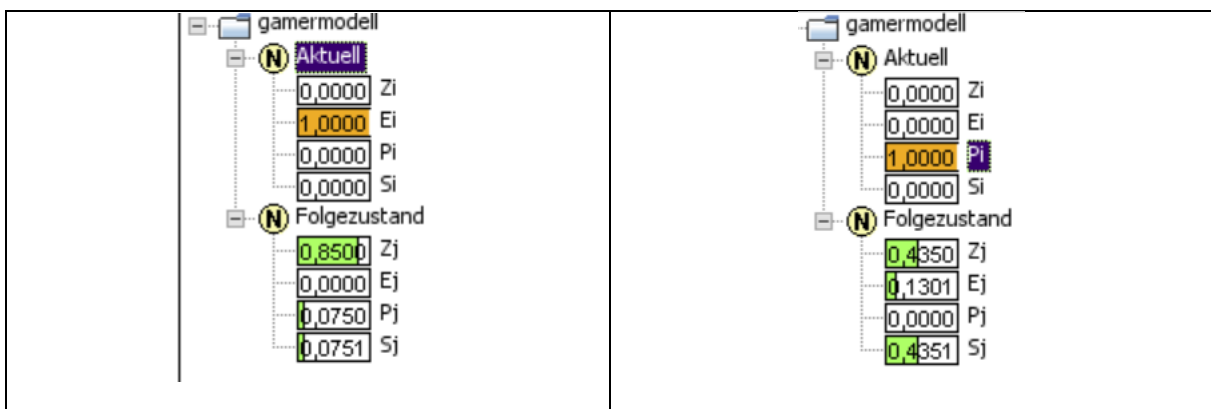


Abbildung 7: Beispiele zur Ermittlung bedingter Wahrscheinlichkeiten mit *SPIRIT*.

Im linken Beispiel wurde als Bedingung $Aktuell = E_i$ gesetzt. Daraus resultieren die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Z_j|E_i) = 0,85$, $P(E_j|E_i) = 0,0$, $P(P_j|E_i) = 0,075$ und $P(S_j|E_i) = 0,0751$. Im rechten Beispiel besteht die Bedingung $Aktuell = P_i$ und die zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeiten können analog zum linken Beispiel unter der Variablen $\wedge Folgezustand$ abgelesen werden.

Die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} und damit ihrer Elemente $P(s_j, s_i)$ erfolgt gemäß der Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten aus

$$P(s_j, s_i) = P(s_j|s_i) \cdot P(s_i). \quad (7.2)$$

Dabei werden die Terme $P(s_j|s_i)$ und $P(s_i)$ den bedingten Wahrscheinlichkeiten (siehe Abbildung 7 und den Randverteilungen (siehe Abbildung 6) entnommen.

7.3 Rücktransformation der Wahrscheinlichkeitsverteilung in die Übergangsmatrix

Liegt die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P} = (P_{i,j})$ vor, so kann die Übergangsmatrix $\mathbf{T} = (t_{i,j})$ als eine Menge von Konditionalen gemäß ihrer Definition berechnet werden:

$$t_{i,j} = P(s_j|s_i) = \frac{P_{i,j}}{P_i}, \quad (7.3)$$

Hierbei ist zu beachten, dass zwar die Konjunktion $P_{i,j}$ kommutativ ist, dieses aber für das Konditional nicht gilt.

Für jede Zeile i der Übergangsmatrix \mathbf{T} gilt gemäß Glg. (2.3) die Normierungsbedingung von Konditionalen:

$$\sum_i P(s_j|s_i) = 1, \quad \forall i, j. \quad (7.4)$$

Glg. (7.4) ergibt sich unmittelbar, wenn man alle Quotienten $P_{i,j}/P_i$ einer Zeile i aus Glg. (8.3) addiert. Durch die Transformationsvorschrift gemäß Glg. (7.3) wird somit die Normierungsbedingung von Konditionalen stets erfüllt.

Die unvollständige Übergangsmatrix \mathbf{T} im Beispiel des Gamer-Klischeemodells gemäß Tabelle 1 hat folgendes Aussehen:

	Z_j	E_j	P_j	S_j
Z_i	0		0,72	
E_i	0,85	0		
P_i		0,13	0	
S_i				0,05

Seien $\{v_{i,j}\}$ die Menge der unbekanntenen Elemente der Übergangsmatrix \mathbf{T} , dann ergibt sich aus der Normierungsbedingung (2.3) beispielsweise für die erste Zeile ($i = 1$):

$$0 + v_{1,2} + 0,72 + v_{1,4} = 1.$$

Jeder Term $v_{i,j}$ steht für ein $v_{i,j} = P(s_j|s_i)$. Gemäß der Definition von Konditionalen resultiert hieraus:

$$0 + \frac{P(E_j, Z_i)}{P(Z_i)} + 0,72 + \frac{P(S_j, Z_i)}{P(Z_i)} = 1.$$

Die Rücktransformation der Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{P} in die Übergangsmatrix \mathbf{T} erfolgt in *SPiRiT* einfach durch Setzen eines Zustands *Aktuell* = 1, so wie in den beiden Beispielen in Abbildung 7 gezeigt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $t_{i,j}$ aller möglichen Folgezustände können dann direkt unter der Variablen *Folgezustand* abgelesen werden.

Literaturangaben

- [1] T. W. Anderson u. Leo A. Goodman: Statistical Inference about Markov Chains. The Annals of Mathematical Statistics 28 (1957) 1, S. 89–110
- [2] Andrew McCallum, Dayne Freitag u. Fernando C Pereira: Maximum Entropy Markov Models for Information Extraction and Segmentation. International Conference on Machine Learning. 2000
- [3] van der Straeten, E.: Maximum Entropy Estimation of Transition Probabilities of Reversible Markov Chains. Entropy 11 (2009) 4, S. 867–887
- [4] Jens Schomaker: Einführung in die Theorie der Markov-Ketten. <https://www.uni-muenster.de/Stochastik/lehre/SS12/SeminarAnwendungenWT/Vortraege/Schomaker.pdf>, abgerufen am: 20.02.2023
- [5] Bas, E. (Hrsg.): Einführung in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Stochastische Prozesse. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden 2020
- [6] Georgii, H.-O.: Stochastik. De Gruyter 2015
- [7] Shannon, C. E.: A Mathematical Theory of Communication. The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656 (1948)
- [8] Braun, H.: Sicherheitsbewertung von Fahrsituationen mit der Methode der minimalen relativen Entropie, University Library Hagen 2022
- [9] Rohling, H.: Einführung in die Informations- und Codierungstheorie. Springer 1995
- [10] Meyer, C.-H.: Korrektes Schließen bei unvollständiger Information. Anwendung des Prinzips der maximalen Entropie in einem probabilistischen Expertensystem. Zugl.: Hagen, Fernuniv., Diss., 1997. Europäische Hochschulschriften Reihe 41, Informatik, Bd. 29. Frankfurt am Main: Lang 1998
- [11] Rödder, W., Reucher, E. u. Kulmann, F.: Features of the Expert-System-Shell SPIRIT. Logic Journal of IGPL 14 (2006) 3, S. 483–500
- [12] Bretthorst, G. L. u. Jaynes, E. T. (Hrsg.): Probability theory. The logic of science. Cambridge: Cambridge Univ. Press 2013
- [13] Radhakrishna, C.: CONVEXITY PROPERTIES OF ENTROPY FUNCTIONS AND ANALYSIS OF DIVERSITY. Pittsburgh: IMS Lecture Notes 1984
- [14] Förster, m. O.: Analysis 2. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen. Grundkurs Mathematik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2008
- [15] Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Wiesbaden, Heidelberg: Springer Vieweg 2018
- [16] Quarteroni, A.: Numerische Mathematik. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hongkong, London, Mailand, Paris, Tokio: Springer 2001
- [17] Braun, H. u. Marchthaler, R.: Wissenserzeugung nach dem Prinzip der maximalen Entropie (2023), S. 16
- [18] Bärwolff, G.: Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum 2020
- [19] Ertel, W.: Grundkurs Künstliche Intelligenz. Eine praxisorientierte Einführung. Computational Intelligence. Wiesbaden: Springer Vieweg 2016
- [20] FernUniversität in Hagen: Forschungsbereich Operations Research. <https://www.fernuni-hagen.de/BWLOR/>, abgerufen am: 12.04.2023
- [21] Rödder, W., Kulmann, F. u. Kopittke, H.: Operations Research - Wissensbasierte Entscheidungsunterstützung mit SPIRIT. Kurs 00840 Wissensbasierte Entscheidungsunterstützung mit SPIRIT. Hagen: FernUniversität in Hagen 2003